ANALIZA FUNKCJONALNA I TOPOLOGIA

Lista 5 - Twierdzenie Banacha-Steinhausa

1. Niech c_{00} będzie przestrzenią liniową ciągów (np. rzeczywistych), których prawie wszystkie (wszystkie za wyjątkiem skończonej ilości) wyrazy się zerują, z normą $\| x \|_\infty$. Niech będzie dany ciąg (T_n) operatorów liniowych $T_n : c_{00} \to \mathbb{R}$ postaci
$$T_n(x_1, x_2, x_3, \ldots) = nx_n$$
Uzasadnić, że ciąg (T_n) jest punktowo ograniczony, czyli że dla każdego $x \in c_{00}$ ciąg $(|T_n(x)|)$ jest ograniczony, natomiast nie jest jednostajnie ograniczony, tzn. ciąg norm $(\| T_n \|)$ nie jest ograniczony. Porównać z Twierdzeniem B-S.

2. Niech c będzie przestrzenią liniową ciągów (np. rzeczywistych) zbieżnych do zera z normą supremum. Niech będzie dany ciąg operatorów liniowych $T_n : c_0 \to c_0$ postaci
$$T_n(x_1, x_2, x_3, \ldots) = n(x_n, x_{n+1}, \ldots).$$
Sprawdzić, czy jest to ciąg operatorów ograniczonych i zbadać czy rodzina $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ jest punktowo ograniczona i jednostajnie ograniczona.

3. Niech będą dane ciągi funkcjonałów liniowych $T_n, S_n : C_c(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ ($C_c(\mathbb{R})$ to funkcje ciągłe o nośniku zwartym) postaci
$$T_n(f) = n \int_{|x| \le n} f(x)dx, \quad S_n(f) = n \int_{|x| \ge n} f(x)dx$$
Sprawdzić, czy są to ciągi operatorów ograniczonych i zbadać, czy rodziny $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$, $\{S_n : n \in \mathbb{N}\}$ są punktowo ograniczone oraz jednostajnie ograniczone.

4. Pokazać, że przestrzeń wielomianów jednej zmiennej (np. rzeczywistych) $X = \mathbb{R}[x]$ z normą $\| f \| = \max_j |a_j|$ dla $f(x) = a_m x^m + \ldots + a_1 x + a_0$ nie jest zupełna. *Wskazówka:* Zapisując $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ (kładąc $\alpha_j = 0$ gdy $a_j x^j$ nie ma w f) zdefiniować ciąg $T_n \in X^*$ wzorem $T_n(f) = a_0 + \ldots + a_{n-1}$ i pokazać, że jest on punktowo ograniczony, ale nie jest ograniczony jednostajnie i zastosować Twierdzenie B-S.

5. Pokazać, że jeżeli (x_n) jest ciągiem w przestrzeni Banacha X (np. nad ciałem $\mathbb{C}$), takim że dla każdego $\varphi \in X^*$ ciąg $(\varphi(x_n))$ jest ograniczony, to ciąg norm $(\| x_n \|)$ jest ograniczony. *Wskazówka:* Zdefiniować ciąg operatorów $T_n : X^* \to \mathbb{C}$ wzorem $T_n(\varphi) = \varphi(x_n)$ i zastosować Twierdzenie B-S.

6. Niech X, Y będą przestrzeniami Banacha oraz niech $T_n \in B(X, Y)$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Korzystając między innymi z poprzedniego zadania, pokazać, że następujące warunki sa równowazne:
   (a) ciąg $(\| T_n \|)$ jest ograniczony,
   (b) ciąg $(\| T_n(x) \|)$ jest ograniczony dla każdego $x \in X$,

(c) ciąg $(|\varphi(T_n(x))|)$ jest ograniczony dla każdego $x \in X$ i każdego $\varphi \in Y^*$.

7. Niech $x = (x_n)$ będzie ciągiem liczb zespolonych, takim że dla każdego ciągu $y = (y_n) \in c_0$ (zbieżnego do zera) zachodzi zbieżność szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n.$$
Pokazać, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ jest bezwględnie zbieżny, czyli że $x \in \ell^1$, stosując Twierdzenie B-S. *Wskazówka:* Zastosować B-S do ciągu operatorów $T_n : c_0 \to \mathbb{C}$ zadanych wzorem $T_n(y) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$ oraz pokazać, że $\sum_{j=1}^{n} |x_j| \leq \| T_n \| \leq M$.

8. Funkcja $D_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ określona wzorem
$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$$
nazywa się *jądrem Dirichleta*. Wyprowadzić prosty wzór algebraiczny
$$D_n(x) = \frac{\sin(n+1/2)x}{\sin(x/2)}$$
dla $x \neq 0$ oraz pokazać, że
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} |D_n(x)| dx = \infty$$

9. *Szeregiem Fouriera* rzeczywistej funkcji całkowalnej f na $(0, 2\pi)$ jest szereg
$$S(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{imx}, \quad \text{gdzie } a_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-imt} dt.$$
Jego obcięcie jest dane wzorem
$$S_n(x) = \sum_{m=-n}^{n} a_m e^{imx}$$
Kładąc $f(x + 2\pi) = f(x)$ dla $x \in (0, 2\pi)$, pokazać, że
$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) D_n(x - t) dt$$

10. Niech X będzie przestrzenią Banacha wszystkich rzeczywistych funkcji ciągłych na $[0, 2\pi]$, dla których $f(0) = f(2\pi)$. Pokazać, że operator $T_n : X \to \mathbb{R}$ postaci
$$T_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) D_n(x) dx$$
jest ograniczony i ma normę
$$\| T_n \| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D_n(x)| dx$$

11. Korzystając z zadań 8-10 oraz Twierdzenia B-S, pokazać, że istnieje funkcja $f \in X$ (przestrzeń z poprzedniego zadania), której szereg Fouriera jest rozbieżny w $x = 0$.

R. Lenczewski